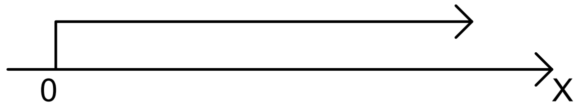
UTILIZAÇÃO DE VARIÁVEIS BINÁRIAS NA FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MISTA

Muitas vezes, bastam pequenas alterações a um enunciado de um problema de Programação Linear para que esse ele deixe de ser um problema de Programação Linear e a sua formulação não seja possível fazer-se apenas com o recurso às tradicionais variáveis não negativas... Nestes casos, é frequente poder-se "dar a volta" ao problema utilizando variáveis binárias (que tomam os valores 0 ou 1)...

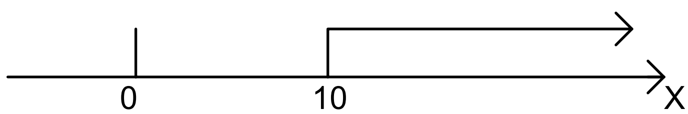
Veremos, em seguida, algumas das situações clássicas em que o recurso às variáveis binárias nos permitirá levar a cabo a formulação, conduzindo, geralmente, a um modelo de programação Linear Mista (isto é, um modelo de P.L. onde, além das variáveis não negativas, existem também variáveis inteiras).

1 - O Lote mínimo

As variáveis utilizadas nos modelos de Programação Linear são não negativas:



Muitas vezes, torna-se necessário, exigir que uma variável X ou seja nula, ou seja não inferior a um determinado valor (por exemplo, 10) - a situação que normalmente se conhece como "o lote mínimo": ou não se produz um determinado artigo, ou então produz--se, pelo menos, o "lote mínimo". Esquematicamente ter-se-ia:



Seja Z uma variável binária que toma ou o valor 0, ou o valor 1 - $\mathbf{Z \in \{ 0 ; 1 \}}$, o que se pode exprimir como uma **conjunção** de três condições: $\mathbf{Z \leq 1}$; $\mathbf{Z \geq 0}$; **Z inteiro** .

Seja M um valor numérico positivo muito elevado (relativamente aos valores dos outros coeficientes intervenientes no problema) - [sempre que necessário, ao longo das várias situações a apresentar, utilizaremos esta notação sem qualquer outra indicação adicional] .

A condição $\mathbf{X = 0}$ **ou** $\mathbf{X \geq 10}$ pode representar-se pela conjunção das seguintes condições:

$$\boxed{\begin{array}{l} X \geq 10 \,.\, Z \\ X \leq M \,.\, Z \\ Z \in \{ 0 ; 1 \} \\ X \geq 0 \end{array}}$$

Se Z = 0

$\mathbf{X \geq 0}$
$\mathbf{X \leq 0}$, **ou seja, X = 0.**

Se Z = 1

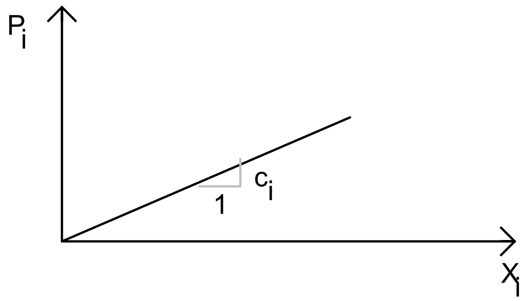
$\mathbf{X \geq 10}$
$\mathbf{X \leq M}$, **ou seja, X ≥ 10 .**

De notar que $X \leq M$, em termos práticos nada restringe, já que M é um valor positivo tão grande quanto se queira... Daí que a conjunção de $X \leq M$ com $X \geq 10$ se traduza, em termos práticos, em $X \geq 10$.

Assim, conseguiu-se através de restrições lineares, representar a situação de "**Lote mínimo**".

2 - Custo fixo de arranque de produção

O objectivo dos problemas de Programação Linear pode exprimir-se do modo seguinte: MIN $\mathbf{F = c_1 . X_1 + c_2 . X_2 + ... + c_n . X_n}$, ou seja, a parcela $\mathbf{P_i}$ correspondente à variável $\mathbf{X_i}$ é igual a $\mathbf{c_i . X_i}$, podendo representar-se graficamente do modo seguinte:



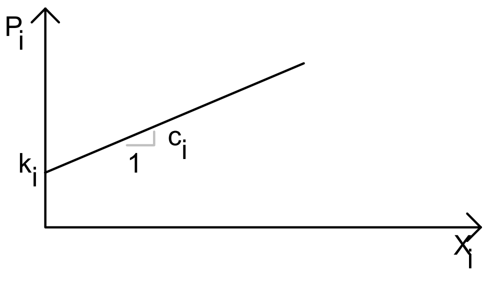
Em muitas situações reais não é adequado admitir que $\mathbf{P_i}$ tem o comportamento linear indicado anteriormente.

Imaginemos, por exemplo, que F representa o custo total (em u.m.) de produção semanal de uma fábrica que produz dois tipos de peças (A e B). Se $\mathbf{X_A}$ e $\mathbf{X_B}$ representar, respectivamente, o número de peças A e B a produzir semanalmente, pode não ser realista representar $\mathbf{P_A = 5 . X_A}$ (o que corresponderia a afirmar que, por cada peça A produzida, se incorre num custo de 5 u.m.); muitas vezes, para se iniciar o processo de produção incorre-se num custo fixo de arranque do processo produtivo (*set-up cost*), por exemplo 1 u.m. e, para além desse custo fixo, tem que se admitir o custo variável que depende do número de peças A produzidas - por exemplo, admitir um custo unitário de 4 u.m. . Ou seja, em vez de $\mathbf{P_A = 5 . X_A}$ que se tinha anteriormente, passar-se-ia a ter $\mathbf{P_A = 0}$ **(se** $\mathbf{X_A = 0}$**) , ou alternativamente,** $\mathbf{P_A = 1 + 4 . X_A}$ **(se** $\mathbf{X_A > 0}$**).**

Generalizando, se $\mathbf{k_i}$ e $\mathbf{c_i}$ representarem, respectivamente, o custo fixo e o custo unitário relativo à parcela $\mathbf{P_i}$ ter-se-ia:

$\mathbf{P_i = 0}$ **(se** $\mathbf{X_i = 0}$**) , ou alternativamente,** $\mathbf{P_i = k_i + c_i . X_i}$ **(se** $\mathbf{X_i > 0}$**)** ,

o que se pode representar graficamente do modo seguinte:



A condição $P_i = 0$ **(se** $X_i = 0$**) , ou alternativamente,** $P_i = k_i + c_i \cdot X_i$ **(se** $X_i > 0$**)** pode representar-se pela conjunção das seguintes condições:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Min } F = \ldots + k_i \cdot Z_i + c_i \cdot X_i + \ldots \\ \\ X_i \le M \cdot Z \\ \\ Z \in \{0 ; 1\} \\ \\ X_i \ge 0 \end{array}}$$

$Z = 0 \Rightarrow X_i \le 0 \wedge X_i \ge 0 \Leftrightarrow X_i = 0$

$\text{Min } F = \ldots + K_i \cdot 0 + c_i \cdot 0 + \ldots$,
ou seja, $P_i = 0$ **.**

$Z = 1 \Rightarrow X_i \le M \wedge X_i \ge 0 \Leftrightarrow X_i \ge 0$

$\text{Min } F = \ldots + K_i \cdot 1 + c_i \cdot X_i + \ldots$,
ou seja, $P_i = k_i + c_i \cdot X_i$ **.**

Relembra-se que $X \le M$, em termos práticos nada restringe, já que M é um valor positivo tão grande quanto se queira... Daí que a conjunção de $X \le M$ com $X \ge 0$ se traduza, em termos práticos, em $X \ge 0$.

Assim, conseguiu-se através de restrições lineares, representar a situação de "**Custo fixo de arranque de produção".**

3 - Variável que toma valores de um dado conjunto discreto

Em determinados problemas reais, uma variável só pode tomar valores pertencentes a um determinado conjunto discreto (por exemplo, para o dimensionamento de uma rede de abastecimento de água, a variável diâmetro das canalizações comerciais só pode tomar valores correspondentes aos diâmetros comercializados; como exemplo mais quotidiano pode apresentar-se a variável "nº de ovos a comprar" - obviamente em múltiplos de 6 ...).

Suponha-se que $X \in \{x_1 , x_2, \ldots , x_k\}$.

Esta situação pode modelar-se com a conjunção das seguintes condições:

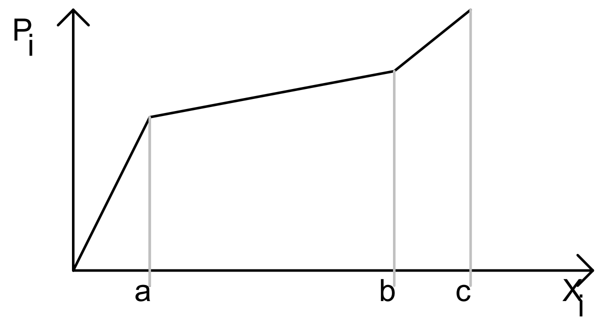
$$\boxed{\begin{array}{l} X = Z_1 \cdot x_1 + Z_2 \cdot x_2 + \ldots + Z_k \cdot x_k \\ Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_k = 1 \\ Z_1, Z_2, \ldots , Z_k \in \{0 ; 1\} \end{array}}$$

Note-se que a conjunção das duas últimas condições obriga a que uma, e só uma, das variáveis Z_1, Z_2, ... , Z_k tome o valor 1, tomando as restantes variáveis o valor 0. Assim, se, por exemplo, $Z_2 = 1$ ter-se-á $X = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \ldots + 0 \cdot x_k$, ou seja, $X = x_2$. **Genericamente, se** $Z_i = 1$ **, então** $X = x_i$ **(i = 1, 2, ... , k)** .

Conseguiu-se, assim, representar facilmente a situação de "**Variável que toma valores de um dado conjunto discreto".**

4 - Função objectivo com troços lineares de diferentes inclinações

Já se apresentou a situação em que na função objectivo de um problema de Programação Linear a parcela $\mathbf{P_i}$ correspondente à variável $\mathbf{X_i}$ deixa de ser igual a $\mathbf{c_i \cdot X_i}$, passando a ser $\mathbf{k_i + c_i \cdot X_i}$. Como se poderá tratar uma situação em que a parcela $\mathbf{P_i}$ seja representada por troços lineares de diferentes inclinações ? Veja-se, a título de ilustração a figura seguinte:



Imagine-se, sem perda de generalidade, que, relativamente à figura anterior se tinha: **a = 5 (declive da f.o. = 1,0) ; b = 12 (declive da f.o. = 0,5) e c = 20 (declive da f.o. = 0,7)** .

Poderemos imaginar que a variável X_i se exprime como a soma de **três variáveis não negativas** $\mathbf{Y_1}$ (correspondente ao intervalo $X_i \in [\ 0\ ;\ a\ ]$) , $\mathbf{Y_2}$ (correspondente ao intervalo $X_i \in [\ a\ ;\ b\ ]$) e $\mathbf{Y_3}$ (correspondente ao intervalo $X_i \in [\ b\ ;\ c\ ]$) , ou seja,

$\mathbf{X_i = Y_1 + Y_2 + Y_3}$, verificando-se adicionalmente

$\mathbf{0 \le Y_1 \le 5}$ (5 é a amplitude do intervalo [0 ; a = 5])
$\mathbf{0 \le Y_2 \le 7}$ (7 é a amplitude do intervalo [a = 5 ; b = 12])
$\mathbf{0 \le Y_3 \le 8}$ (8 é a amplitude do intervalo [b = 12 ; c = 20]) .

Nestas condições poder-se-ia escrever:

$$\mathbf{P_i = 1{,}0 \cdot Y_1 + 0{,}5 \cdot Y_2 + 0{,}7 \cdot Y_3} \ .$$

No entanto, para que este artifício seja válido, é preciso garantir que:

$\mathbf{Y_1 = 5}$ **sempre que** $\mathbf{Y_2 > 0}$ <u>**e**</u> $\mathbf{Y_2 = 7}$ **sempre que** $\mathbf{Y_3 > 0}$.

Tal consegue-se com a introdução de duas variáveis binárias $\mathbf{Z_1 , Z_2 \in \{ 0; 1 \}}$: $\mathbf{Z_1}$ toma o valor **1** sempre que $\mathbf{Y_1}$ atinja o seu valor máximo (5) e toma o valor **0** , caso contrário; analogamente, $\mathbf{Z_2}$ toma o valor **1** sempre que $\mathbf{Y_2}$ atinja o seu valor máximo (7) e toma o valor **0** , caso contrário.

Assim, o exemplo indicado de **função objectivo com troços lineares de diferentes inclinações**, pode modelar-se com a conjunção das seguintes condições:

$$
\begin{array}{ll}
X_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 & [\,1\,] \\[1em]
P_i = 1{,}0 \,.\, Y_1 + 0{,}5 \,.\, Y_2 + 0{,}7 \,.\, Y_3 & [\,2\,] \\[1em]
5 \,.\, Z_1 \le Y_1 \le 5 & [\,3\,] \\
7 \,.\, Z_2 \le Y_2 \le 7 \,.\, Z_1 & [\,4\,] \\
\quad 0 \le Y_3 \le 8 \,.\, Z_2 & [\,5\,] \\[1em]
Z_1 \,,\, Z_2 \in \{\,0; 1\,\} & [\,6\,]
\end{array}
$$

Note-se que:

- a função objectivo F (de que P_i é uma parcela) **tanto pode ser maximizada como minimizada**.

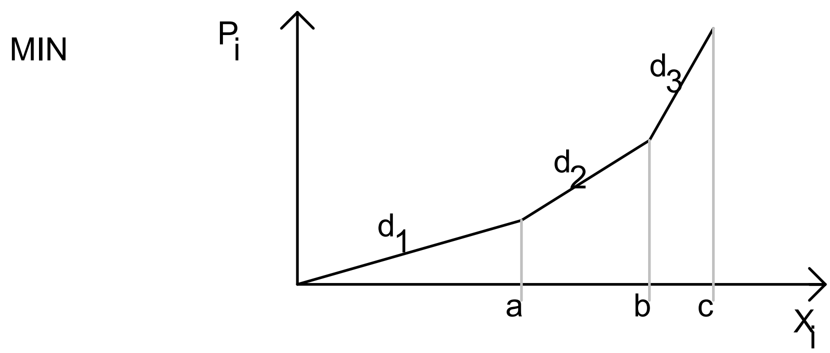
- se $Z_1 = 0$, então $Z_2 = 0$ (condição [4]). Tal ocorre quando $X \in [\,0 ; a = 5\,]$ e, consequentemente, $0 \le Y_1 \le 5$ (condição [3]) ; $Y_2 = 0$ (condição [4]) e $Y_3 = 0$ (condição [5]).

- se $Z_1 = 1$, então Z_2 pode tomar o valor 0 ou o valor 1 (condições [4],[5]).

- se $Z_1 = 1$ e $Z_2 = 0$, então $X \in [\,a = 5 ; b = 12\,]$, isto é, $Y_1 = 5$ (condição [3]) , $0 \le Y_2 \le 7$ (condição [4]) e $Y_3 = 0$ (condição [5]).

- se $Z_1 = 1$ e $Z_2 = 1$, então $X \in [\,b = 12 ; c = 20\,]$, isto é, $Y_1 = 5$ (condição [3]) , $Y_2 = 7$ (condição [4]) e $0 \le Y_3 \le 8$ (condição [5]).

Um caso particular de **função objectivo com troços lineares de diferentes inclinações** diz respeito às chamadas **deseconomias de escala** - **função que se pretende minimizar com troços com declives crescentes** (ou, alternativamente, maximizar uma função com troços com declives decrescentes).



Na figura anterior d_1 , d_2 e d_3 designam, respectivamente, os declives dos troços [0 ; a] , [a ; b] e [b ; c], verificando-se $d_1 \le d_2 \le d_3$.

A situação de **deseconomias de escala** - **função que se pretende minimizar com troços com declives crescentes**, pode modelar-se com a conjunção das seguintes condições:

$$X_i = Y_1 + Y_2 + Y_3 \qquad [1]$$

$$P_i = d_1 . Y_1 + d_2 . Y_2 + d_3 . Y_3 \qquad [2]^*$$
$$(\text{MIN } F \text{ e } d_1 \le d_2 \le d_3)$$

$$0 \le Y_1 \le a \qquad [3]$$
$$0 \le Y_2 \le b - a \qquad [4]$$
$$0 \le Y_3 \le c - b \qquad [5]$$

De notar que, relativamente ao caso geral apresentado anteriormente, existem as seguintes peculiaridades:

- a função objectivo **F** (de que P_i é uma parcela) **apenas pode ser minimizada** (estamos a tratar da situação de declives crescentes: $d_1 \le d_2 \le d_3$).

- **não é necessário introduzir variáveis binárias** para garantir que **$Y_1 = a$ sempre que $Y_2 > 0$ e $Y_2 = b - a$ sempre que $Y_3 > 0$** , já que como se pretende **minimizar F** e como os declives dos troços são crescentes $d_1 \le d_2 \le d_3$, fica garantido o cumprimento das condições referidas (é sempre melhor, em termos do objectivo, incrementar a variável Y_1 do que Y_2 ou Y_3 , pelo que só depois de Y_1 tomar o seu valor máximo (a) se incrementa Y_2 ; analogamente, só depois de Y_2 tomar o seu valor máximo (b - a) se incrementa Y_3) .

- se se pretender resolver um problema de maximização de uma função com troços lineares de declives crescentes, deve optar-se pela formulação correspondente ao caso geral apresentado anteriormente (com as variáveis binárias).

5 - Activação de uma de entre duas restrições

Imaginemos que se pretende **garantir que seja cumprida, pelo menos uma, de entre duas restrições** de um problema de Programação Linear. A título de exemplo consideremos:

$$\text{Ou} \quad 3 . X_1 + 2 . X_2 \le 18 \ ,$$
$$\text{ou} \quad X_1 + 4 . X_2 \le 16 \ .$$

Se somarmos ao segundo membro de uma restrição do tipo " $\le$ " um valor positivo muito elevado **M** , estamos, em termos práticos a "anular" a restrição. Com efeito, por exemplo, $3 . X_1 + 2 . X_2 \le 18 + M$ nada restringe, em termos práticos, já que por muito elevados que sejam os valores atribuídos às variáveis X_1 e X_2 a restrição continua a ser verificada.

Assim, pode dizer-se que há uma equivalência entre

$$\begin{array}{ll} \text{Ou} & 3 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 \le 18 \;, \\ \text{ou} & X_1 + 4 \,.\, X_2 \le 16 \;. \end{array}$$

e

$$\begin{array}{llcl} \text{ou} & 3 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 \le 18 & \wedge & X_1 + 4 \,.\, X_2 \le 16 + M, \\ \text{ou} & X_1 + 4 \,.\, X_2 \le 16 & \wedge & 3 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 \le 18 + M. \end{array}$$

.

Assim, a situação de **escolha de uma de entre duas restrições** (relativa ao exemplo apresentado), pode modelar-se com a conjunção das seguintes condições:

$$\begin{array}{lr} 3 \,.\, X_1 + 2 \,.\, X_2 \le 18 + M \,.\, Z & [\,1\,] \\ X_1 + 4 \,.\, X_2 \le 16 + M \,.\, (\,1 - Z\,) & [\,2\,] \\ Z \in \{\,0\,;\,1\,\} & [\,3\,] \end{array}$$

De notar que:

- se $Z = 0$, então exige-se o cumprimento da primeira restição; caso contrário, exige-se o cumprimento da segunda restrição [No entanto, nada impede que ambas sejam pontualmente verificadas] .

- se uma **restrição** for **do tipo " ≥ "** , a parcela M . Z (ou, M . (1 - Z)) deverá ser subtraída ao segundo membro da desigualdade.

- se a disjunção não for exclusiva, bastará a cada uma das duas restrições fazer corresponder uma variável binária e, adicionalmente, exigir que a soma dessas variáveis binárias não exceda 1.

6 - Activação de k restrições de entre um grupo de restrições

A generalização do caso anterior pretende **garantir que, de entre um grupo com mais de k restrições, sejam cumpridas, pelo menos k restrições** de um problema de Programação Linear.

Imaginemos que, de entre as N restrições seguintes pretendemos activar, pelo menos k (k < n) .

$$\begin{aligned}
&f_1 (X_1 , X_2 , \dots , X_n) \le d_1 ,\\
&f_2 (X_1 , X_2 , \dots , X_n) \le d_2 ,\\
&f_3 (X_1 , X_2 , \dots , X_n) \le d_3 ,\\
&.\\
&.\\
&.\\
&f_N (X_1 , X_2 , \dots , X_n) \le d_N ,
\end{aligned}$$

Tal, poder-se-ia conseguir do modo seguinte:

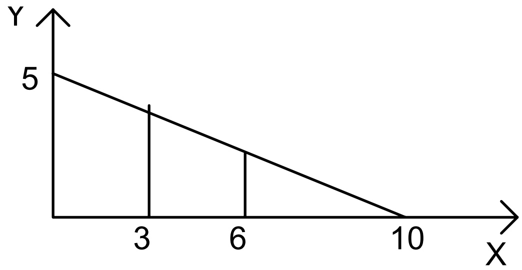
$$\begin{aligned}
&f_1 (X_1 , X_2 , \dots , X_n) \le d_1 + M . Z_1\\
&f_2 (X_1 , X_2 , \dots , X_n) \le d_2 + M . Z_2\\
&f_3 (X_1 , X_2 , \dots , X_n) \le d_3 + M . Z_3\\
&.\\
&.\\
&.\\
&f_N (X_1 , X_2 , \dots , X_n) \le d_N + M . Z_N\\
&\\
&Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N = N - k\\
&Z_1 , Z_2 , \dots , Z_N \in \{ 0 ; 1 \}
\end{aligned}$$

De notar que se a variável $\mathbf{Z_i}$ tomar o valor 0, a restrição $\mathbf{f_i (X_1, X_2 , \dots , X_n) \le d_i}$ é activada. Por outro lado, a condição $\mathbf{Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N = N - k}$, em simultâneo com $\mathbf{Z_1 , Z_2 , \dots , Z_N \in \{ 0 ; 1 \}}$ garante-nos que exactamente **k** variáveis $\mathbf{Z_i}$ tomem o valor 0, isto é, que exactamente **k** restrições sejam activadas, como se pretendia.

7 - Representação de domínios planos não convexos por disjunção de restrições lineares

Exemplificaremos esta situação com a apresentação dos três exemplos seguintes:

Exemplo A - Considere-se o domínio plano representado na figura seguinte:



Este domínio plano pode representar-se por

$$\{\; X + 2 \,.\, Y \le 10 \;\wedge\; X \ge 0 \;\wedge\; Y \ge 0 \;\wedge\; (\; X \le 3 \;\vee\; X \ge 6 \;)\;\} \; ,$$

ou, alternativamente, pela conjunção das condições seguintes:

$$X + 2 \,.\, Y \le 10 \qquad [\,1\,]$$

$$X \ge 0 \qquad [\,2\,]$$

$$Y \ge 0 \qquad [\,3\,]$$

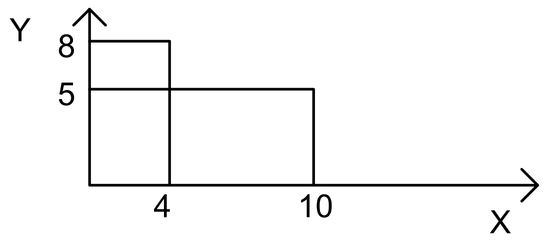
$$X \le 3 + M \,.\, Z \qquad [\,4\,]$$

$$X \ge 6 - M \,.\, (\,1 - Z\,) \qquad [\,5\,]$$

$$Z \in \{\,0 \,;\, 1\,\} \qquad [\,6\,]$$

De notar que as condições [1], [2] e [3] são **sempre** verificadas. Se Z = 0 , a restrição " X ≤ 3 " é activada e a restrição " X ≥ 6 " é desactivada, acontecendo o inverso se Z = 1 .

Exemplo B - Considere-se o domínio plano representado na figura seguinte:



Este domínio plano pode representar-se por

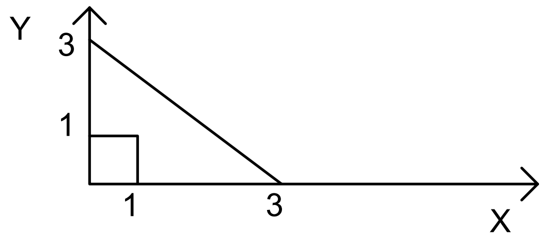
$$\{ X \le 10 \wedge Y \le 8 \wedge X \ge 0 \wedge Y \ge 0 \wedge (X \le 4 \vee Y \le 5) \} ,$$

ou, alternativamente, pela conjunção das condições seguintes:

$X \le 10$	[1]
$Y \le 8$	[2]
$X \ge 0$	[3]
$Y \ge 0$	[4]
$X \le 4 + M . Z$	[5]
$Y \le 5 + M . (1 - Z)$	[6]
$Z \in \{ 0 ; 1 \}$	[7]

De notar que as condições [1], [2], [3] e [4] são **sempre** verificadas. Se $Z = 0$, a restrição " $X \le 4$ " é activada e a restrição " $Y \le 5$ " é desactivada, acontecendo o inverso se $Z = 1$.

Exemplo C - Considere-se o domínio plano representado na figura seguinte:



Este domínio plano pode representar-se por

$$\{ X + Y \leq 3 \ \wedge \ X \geq 0 \ \wedge \ Y \geq 0 \ \wedge \ (X \geq 1 \ \vee \ Y \leq 1) \} \ ,$$

ou, alternativamente, pela conjunção das condições seguintes:

$X + Y \leq 3$	[1]
$X \geq 0$	[2]
$Y \geq 0$	[3]
$X \geq 1 - M . Z$	[4]
$Y \geq 1 - M . (1 - Z)$	[5]
$Z \in \{ 0 ; 1 \}$	[6] .

De notar que as condições [1], [2] e [3] são **sempre** verificadas. Se $Z = 0$, a restrição " $X \geq 1$ " é activada e a restrição " $Y \geq 1$ " é desactivada, acontecendo o inverso se $Z = 1$.

8 - Implicação de restrições

A utilização de variáveis binárias permite ainda modelar a relação de implicação entre restrições. Para tal, basta recordarmo-nos da equivalência entre $\mathbf{a \Rightarrow b}$ e $\mathbf{\sim a \vee b}$.

Considere-se um **primeiro exemplo**:

Se (X + Y > 10), então (Z ≥ 3 ∧ W ≤ 5).

Esta implicação é equivalente a **(X + Y ≤ 10) ou (Z ≥ 3 ∧ W ≤ 5)**, o que pode representar-se com a conjunção das condições seguintes:

$X + Y \leq 10 + M . Z_1$	[1]
$Z \geq 3 - M . Z_2$	[2]
$W \leq 5 + M . Z_2$	[3]
$Z_1 + Z_2 \leq 1$	[4]
$Z \in \{ 0 ; 1 \}$	[5] .

De notar que se Z = 0 , a restrição " X + Y ≤ 10 " é activada e as restrições " Z ≥ 3 " e " W ≤ 5 " são desactivadas, acontecendo o inverso se Z = 1 .

Consideremos agora um **segundo exemplo**: Representar, como conjunção de condições, $\mathbf{| X | > 5}$.

Como se sabe,

$$| X | > 5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} X > 5 , \text{ se } X \geq 0 \\ -X > 5 , \text{ se } X < 0 \end{cases}$$

Relativamente à implicação $\mathbf{X \geq 0 \Rightarrow X > 5}$, pode-se escrever equivalentemente $\mathbf{X < 0 \vee X > 5}$, o que pode representar-se com a conjunção das condições seguintes:

$X < 0 + M . Z$	[1]
$X > 5 - M . (1 - Z)$	[2]
$Z_1 + Z_2 \leq 1$	[3]
$Z \in \{ 0 ; 1 \}$	[4] .

De notar que, se $Z = 0$, então $X < 0$; se $Z = 1$, então $X > 5$. Isto é, $X < 0$ ou $X > 5$, como se pretendia.

Relativamente à implicação $X < 0 \Rightarrow - X > 5$, pode-se escrever equivalentemente $X \geq 0 \vee - X > 5$, o que pode representar-se com a conjunção das condições seguintes:

$$\boxed{\begin{array}{ll} X \geq 0 - M.(1-Z) & [1] \\ -X > 5 - M.Z & [2] \\ Z \in \{0;1\} & [3]. \end{array}}$$

De notar que, se $Z = 0$, então $- X > 5$; se $Z = 1$, então $X \geq 0$. Isto é, $X \geq 0$ ou $- X > 5$, como se pretendia. De realçar ainda o facto de se ter tido o cuidado de escrever os dois conjuntos de conjunções de condições relativos às duas implicações, de modo a que os "resultados" sejam compatíveis, permitindo a sua sobreposição. Com efeito, se $Z = 0$, X toma sempre um valor negativo; e se $Z = 1$, X toma sempre um valor não negativo [Tal não aconteceria se a conjunção de condições relativa à segunda implicação fosse $X \geq 0 - M.Z$ e $-X > 5 - M.(1-Z)$ e $Z \in \{0;1\}$, que representaria correctamente essa implicação...] .

Assim, poderemos sintetizar os resultados:

$$\boxed{|X| > 5} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{ll} X < 0 + M.Z & [1] \\ X > 5 - M.(1-Z) & [2] \\ X \geq 0 - M.(1-Z) & [3] \\ -X > 5 - M.Z & [4] \\ Z \in \{0;1\} & [5]. \end{array}}$$

De notar que, se $Z = 0$, então $X < 0$ [1] e $- X > 5$ [4] , ou seja $X < - 5$; se $Z = 1$, então $X > 5$ [2] e $X \geq 0$ [3] , ou seja $X > 5$. Isto é, $X < - 5$ ou $X > 5$, o que é efectivamente o que acontece com $|X| > 5$.

9 - Problemas de escolha múltipla

Admita-se que as variáveis X_1, X_2, ... , X_n estão associadas a **n** actividades que poderão ser levadas a cabo. X_i corresponde à "intensidade" com que a **i**-ésima actividade deve ser levada a cabo (se $X_i = 0$ a **i**-ésima actividade não deve ser levada a cabo; se $X_i > 0$ a **i**-ésima actividade deve ser executada).

Admita-se ainda que as **n** actividades estão divididas em **k** grupos. Seja N_j o número de actividades pertencentes ao grupo **j** , pelo que $N_1 + N_2 + ... + N_k = n$.

Admita-se que se pretende **garantir que apenas uma actividade de cada grupo venha a ser levada a cabo.**

Tal, pode conseguir-se fazendo:

Grupo 1	$X_j \leq 0 + M . Z_j , \quad \forall j \in \text{"Grupo 1"}$	**[1]**
	$\sum_{j \in \text{"Grupo 1"}} Z_j = 1$	**[2]**
	$Z_j \in \{ 0 ; 1 \} , \quad \forall j \in \text{"Grupo 1"}$	**[3]**
. . .	. . .	
Grupo k	$X_j \leq 0 + M . Z_j , \quad \forall j \in \text{"Grupo k"}$	**[1]**
	$\sum_{j \in \text{"Grupo k"}} Z_j = 1$	**[2]**
	$Z_j \in \{ 0 ; 1 \} , \quad \forall j \in \text{"Grupo k"}$	**[3]**
	$X_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, ... , n$	**[4]**

Relativamente a cada grupo de actividades, as restrições [2] e [3] garantem que só uma das variáveis Z_j tome o valor 1, sendo nulas as restantes. Assim, garante-se que a variável X_j possa ser positiva; pelo contrário, a conjunção das restrições [1], [2] e [3] do grupo de actividades e da restrição [4], obriga as restantes variáveis X_i do grupo a tomarem o valor 0. Ou seja, relativamente a cada grupo de actividades, apenas uma actividade é levada a cabo, como se pretendia.

É fácil fazer pequenas variantes: exigir que, pelo menos, uma actividade por grupo seja levada a cabo; exigir que duas actividades por grupo sejam levadas a cabo ...

Para terminarmos a abordagem da utilização das variáveis binárias na formulação de problemas de Programação Linear Mista, consideraremos o seguinte **problema-global** :

O responsável pelos serviços de informática de uma grande empresa pretende planear a aquisição de novo equipamento (microcomputadores, impressoras e monitores).

Estão disponíveis no mercado três marcas de microcomputadores considerados adequados (A, B e C), duas marcas de impressoras (D e E) e quatro marcas de monitores (F, G*, H e I* - * designa monitores de alta resolução).

Sabe-se que os microcomputadores da marca A são imcompatíveis com os monitores da marca H e que os microcomputadores da marca C são imcompatíveis com as impressoras da marca E.

O responsável pelos serviços de informática decidiu que:

1) devem ser comprados, pelo menos, 30 microcomputadores e 5 impressoras;
2) devem ser comprados, pelo menos, tantos monitores quantos os microcomputadores comprados; o número de monitores comprado não poderá, no entanto, exceder em mais de 15 % o número de microcomputadores comprado;
3) pelo menos, 30 % dos monitores comprados deverão ser de alta resolução;
4) só se deverá comprar microcomputadores de uma única marca.
5) só se deverá comprar impressoras de uma única marca.
6) poderão ser comprados monitores de, no máximo, duas marcas diferentes.

Sabe-se que se dispõe de 550 u.m. para proceder às aquisições de equipamento informático e pretende-se maximizar a Utilidade Global do equipamento adquirido.

Conhece-se o quadro seguinte:

Marca	Utilidade unitária	Custo total (*) (u.m.)
A	10	$15 \cdot X_A$
B	8	$3 + 12 \cdot X_B$
C	9	$13 \cdot X_C$, $X_C \le 10$; $130 + 10 \cdot (X_C - 10)$, $X_C > 10$
D	4	$1 + 5 \cdot X_D$
E	3	$2 + 4 \cdot X_E$
F	1	X_F, $X_F \le 6$; $1{,}2 + 0{,}8 \cdot X_F$, $6 < X_F \le 12$; $3{,}6 + 0{,}6 \cdot X_F$, $X_F > 12$
G	5	$1{,}2 \cdot X_G$ - só vendido em lotes de 12 unidades
H	2	$0{,}8 \cdot X_H$
I	6	$0{,}4 + 1{,}0 \cdot X_I$

Nota (*) : X_i designa o número unidades de equipamento de marca i a adquirir

Formule o problema com um modelo de Programação Linear Mista adequado.

Considerando que **X_i representa o número unidades de equipamento de marca i a adquirir, i = A, B, ... ,I** , pode formular-se o problema do modo seguinte:

$$\text{MAX } U = 10 X_A + 8 X_B + 9 X_C + 4 X_D + 3 X_E + 1 X_F + 5 X_G + 2 X_H + 6 X_I$$

sujeito a:

$X_A \leq M \,.\, Z_1$
$X_B \leq M \,.\, Z_2$
$X_C \leq M \,.\, Z_3$
$Z_1 + Z_2 + Z_3 = 1$ apenas se compra microcomputadores de uma única marca

---

$X_D \leq M \,.\, Z_4$
$X_B \leq M \,.\, Z_5$
$Z_4 + Z_5 = 1$ apenas se compra impressoras de uma única marca
$Z_5 = 1 - Z_3$ incompatibilidade C / E

$X_F \leq M \,.\, Z_6$
$X_G \leq M \,.\, Z_7$
$X_H \leq M \,.\, Z_8$
$X_I \leq M \,.\, Z_9$
$1 \leq Z_6 + Z_7 + Z_8 + Z_9 \leq 2$ compra-se monitores de, no máx., duas marcas
$Z_8 = 1 - Z_1$ incompatibilidade A / H

$X_A + X_B + X_C \geq 30$ nº mínimo de microcomputadores a adquirir
$X_D + X_E \geq 50$ nº mínimo de impressoras a adquirir

$1{,}15 \,.\, (X_A + X_B + X_C) \geq (X_F + X_G + X_H + X_I) \geq (X_A + X_B + X_C)$ relação nºcomp./nºmonit.
$(X_G + X_I) \geq 0{,}30 \,.\, (X_F + X_G + X_H + X_I)$ Nº mínimo de monitores de alta resol.

$X_G = 12 \,.\, Z_{10} + 24 \,.\, Z_{11} + 36 \,.\, Z_{12} + 48 \,.\, Z_{13}$
$Z_{10} + Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} \leq 1$ monitores G vendidos em lotes de 12 unidades

---

$15 \,.\, X_A + (3 \,.\, Z_2 + 12 .\, X_B) + (13 \,.\, Y_1 + 10 \,.\, Y_2) + (1 \,.\, Z_4 + 5 \,.\, X_D) +$
$+ (2 \,.\, Z_5 + 4 \,.\, X_E) + (1 \,.\, Y_3 + 0{,}8 \,.\, Y_4 + 0{,}6 \,.\, Y_5) + 1{,}2 \,.\, X_G + 0{,}8 \,.\, X_H +$
$+ (0{,}4 \,.\, Z_9 + 1{,}0 \,.\, X_I) \leq 550$ recurso financeiro

$X_C = Y_1 + Y_2$
$10 \,.\, Z_{14} \leq Y_1 \leq 10$
$0 \leq Y_2 \leq 50 \,.\, Z_{14}$ custo unitário dos computadores C variável com X_C

$X_F = Y_3 + Y_4 + Y_5$
$6 \,.\, Z_{15} \leq Y_3 \leq 6$
$6 \,.\, Z_{16} \leq Y_4 \leq 6 \,.\, Z_{15}$
$0 \leq Y_5 \leq 50 \,.\, Z_{16}$ custo unitário dos monitores F variável com X_F

$X_i \geq 0$ e inteiras , i = A,B, ... , I .
$Z_k \in \{ 0 ; 1 \}$, k = 1, ... , 16 - variáveis auxiliares
$Y_m \geq 0$, m = 1, 2, ... , 5 - variáveis auxiliares

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR INTEIRA: O ALGORITMO ‘BRANCH AND BOUND’ (PESQUISA EM ÁRVORE)

Considere-se o **problema 1** seguinte:

MAX $F = 2 . X_A + 3 . X_B$

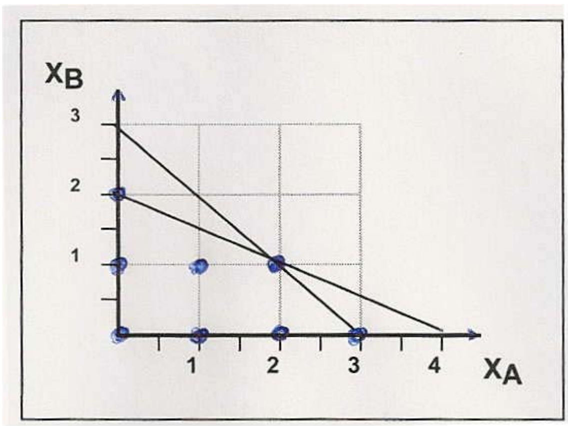
sujeito a:

$$2 . X_A + 4 . X_B \leq 8$$
$$2 . X_A + 2 . X_B \leq 6$$

X_A , $X_B \geq 0$ e inteiras.

Trata-se de um problema de Programação Linear Inteira Pura (PLIP), isto é, um problema de Programação Linear a que adicionalmente se exige a integralidade de todas as variáveis.

Tratando-se de um problema com duas variáveis, podemos resolvê-lo graficamente. Para tal, comecemos por representar o conjunto de soluções admissíveis correspondente:



Como se pode observar na figura anterior, o conjunto de soluções admissíveis corresponde ao conjunto formado pelos oito pontos assinalados, que verificam simultaneamente as duas restrições, as condições de não negatividade e de integralidade das variáveis.

Dado que se pretende maximizar a função objectivo $\mathbf{F = 1 . X_A + 3 . X_B}$, devemos deslocar, tanto quanto possível, no sentido crescente de X_A e de X_B , uma recta de declive (- 1 / 3).

Assim, é fácil determinar o 'último' dos oito 'pontos/soluções admissíveis' a ser tocado pela recta de declive (- 1 / 3) no seu movimento 'ascendente', isto é, tem-se (X_A^* , X_B^*) = (2 , 1) a que corresponde $F^* = 7$.

Se, no problema 1 anterior, *relaxarmos* a condição de integralidade das variáveis (ou seja, prescindirmos da exigência de integralidade das variáveis), estaremos perante um problema de Programação Linear (PL), que diremos ser a **relaxação linear** do problema de PLI original. Com efeito, o conjunto de soluções do problema de PLI está contido no espaço de soluções admissíveis do 'problema relaxado' de PL, pelo que é fácil de concluir que a solução óptima do problema de PLI nunca poderá corresponder a um valor da função objectivo melhor do que o correspondente à solução óptima do respectivo 'problema relaxado' de PL.

No problema 1, a solução óptima do problema relaxado respeita a condição de integralidade, pelo que, obviamente, coincide com a solução óptima do problema de PLI. Ou seja, <u>neste caso</u>, ter-se-á $\mathbf{F^*_{PLI} = F^*_{PL\_}}$. Em geral, para um problema de **maximização**, tem-se $\mathbf{F^*_{PLI} \leq F^*_{PL\_}}$.

Assim, podemos, desde já, indicar um caminho a seguir na resolução de problemas de PLI:

☞

- Começa-se por resolver a relaxação linear do problema de PLI, isto é, o problema de PL 'associado'.

- Se a solução óptima desse problema respeitar a condição de integralidade das variáveis, essa será também a solução óptima do problema de PLI original.

Consideremos, agora, o **problema 2** seguinte:

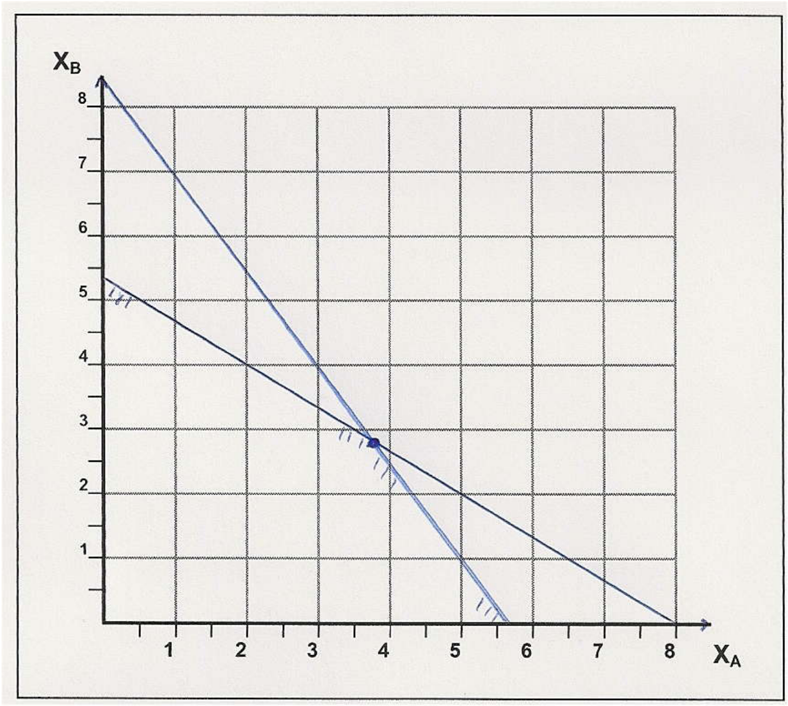
$$\text{MAX } F = 5 . X_A + 6 . X_B$$

sujeito a:

$$2 . X_A + 3 . X_B \leq 16$$
$$3 . X_A + 2 . X_B \leq 17$$

$$X_A , X_B \geq 0 \text{ e inteiras.}$$

Comecemos por representar o conjunto de soluções admissíveis correspondente:



Comecemos por resolver graficamente a relaxação linear do problema. A solução óptima do correspondente problema de PL é $(X_A^* , X_B^*) = (3,8 ; 2,8)$ a que corresponde $F^*_{PL} = 35,8$. Como é óbvio, esta não pode ser a solução óptima do problema de PLI ! Como os coeficientes das variáveis na função objectivo são inteiros, o valor óptimo da função objectivo (do problema de PLI) será inteiro e, consequentemente, não excederá 35 ...

Observe-se que se pretendessemos obter a solução óptima do problema de PLI arredondando *cegamente* a solução anterior, obteríamos (4 , 3), que não é sequer uma solução admissível do problema !

Se tivessemos o cuidado de 'arredondar' a solução óptima do problema de PL para a solução admissível 'mais próxima' do problema de PLI teríamos (3 , 3), a que corresponderia F = 33. Será que essa é a solução óptima do problema de PLI ?

A resposta é negativa ! Com efeito, se deslocarmos uma recta de declive (- 5 / 6), que representa a função objectivo, no sentido crescente de X_A e de X_B , o último 'ponto/solução admissível de PLI' a ser tocado é (2 , 4) , ou seja, $(X_A^* , X_B^*) = (2 , 4)$, a que corresponde $F^*_{PLI} = 34$.

Assim, parece importante reter que,

☞ **Quando se pretende resolver um dado problema de PLI, começando por resolver a sua relaxação linear, nunca se deve assumir que a solução óptima do problema de PLI se pode obter pelo 'arredondamento' da solução óptima dessa relaxação linear !**

Uma questão pode por-se, neste momento: ‘ **A resolução da relaxação linear de um problema de PLI não pode servir de base para a resolução desse problema de PLI ?** ‘

A questão anterior tem resposta afirmativa. O **Método de Pesquisa em Árvore** (**‘Branch and Bound’**), vai permitir obter a solução de um problema de PLI, partindo da resolução da sua relaxação linear (PL), como se verá em seguida.

Dois conceitos estão na base deste método: ‘branching’, ou seja, **ramificação** e ‘bounding’, isto é, **limitação**.

Consideremos um problema de PLI de <u>maximização</u>. Para o resolver pelo Algoritmo ‘Branch and Bound’, começa-se por resolver a sua relaxação linear (um problema que, por simplicidade, designaremos por PL).

- Se a solução óptima respeitar a condição de integralidade das variáveis, então essa será também a solução óptima do problema de PLI.

- Caso contrário, o valor da função objectivo do problema PL poderá ser considerado um limite superior do valor óptimo da função objectivo do problema de PLI .

- Considere-se uma das variáveis que na solução óptima do problema de PL não verifica a condição de integralidade. Assuma-se,sem perda de generalidade, que X é essa variável. Constitua-se as duas restrições seguintes:

$X \geq \lceil X^* \rceil + 1$ **e**

$X \leq \lceil X^* \rceil$ **,**

onde $\lceil X^* \rceil$ **designa o maior valor inteiro que não excede X*.**

- Ramifique-se o problema PL , em dois novos problemas de Programação Linear, PL1 e PL2 , obtidos a partir de PL, cada um deles por adição de cada uma das duas restrições anteriormente definidas.

Desta forma está-se a particionar o conjunto de soluções admissíveis de PLI em dois subconjuntos, contidos respectivamente no espaço de soluções admissíveis de PL1 e PL2 .

--- Interrompamos a apresentação do Algoritmo ‘Branch and Bound’ para o exemplificarmos com a resolução do **problema 2** anteriormente apresentado ---

PLI

$$MAX\ F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \leq 16$$
$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 17$$

$X_A, X_B \geq 0$ e inteiras.

Comecemos por escrever o enunciado ...

PL

$$MAX\ F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \leq 16$$
$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 17$$

$X_A, X_B \geq 0$.

Passemos à Relaxação Linear PL e

determinemos a correspondente solução óptima:

$X_A^* = 3{,}8$; $X_B^* = 2{,}8$; $F^* = 35{,}8$

Actualizemos o limite superior da função objectivo F : Lsup F = 35,8 → 35 pois os coefs. das vars. na f.o. são inteiros.

Ramifiquemos PL a partir da variável X_A : $X_A^* = 3{,}8 \rightarrow X_A \geq 4$; $X_A \leq 3$

PL1

$$MAX\ F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \leq 16$$
$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 17$$
$$X_A \geq 4$$

$X_A, X_B \geq 0$.

Resolvendo, obtemos:

$X_A^* = 4$; $X_B^* = 2{,}5$; $F^* = 35{,}0$

O que nos permitiria 'actualizar' o limite superior da função objectivo F:

Lsup F = 35,0

PL2

$$MAX\ F = 5 \cdot X_A + 6 \cdot X_B$$

sujeito a:

$$2 \cdot X_A + 3 \cdot X_B \leq 16$$
$$3 \cdot X_A + 2 \cdot X_B \leq 17$$
$$X_A \leq 3$$

$X_A, X_B \geq 0$.

Resolvendo, obtemos:

$X_A^* = 3$; $X_B^* = 3{,}(3)$; $F^* = 35{,}0$

O que nos permitiria 'actualizar' o limite superior da função objectivo F:

Lsup F = 35,0

PL11	PL12	PL21	PL22
PL11	PL12	PL21	PL22
PL1 + $X_B \geq 3$	PL1 + $X_B \leq 2$	PL2 + $X_B \geq 4$	PL1 + $X_B \leq 3$
Tentamos resolver, mas ...	**Resolvendo obtemos:**	**Resolvendo obtemos:**	**Resolvendo obtemos:**
O Problema é Impossível	**X_A*= 4,(3) ; X_B*= 2; F* = 33,(6)**	**X_A*= 2 ; X_B*= 4; F* = 34**	**X_A*= 3 ; X_B*= 3; F* = 33**

Normalmente, nos algoritmos de pesquisa em árvore, **a pesquisa é feita em profundidade**, escolhendo-se ramificar o subproblema mais recentemente criado, escolhendo-se, em caso de empate, o subproblema correspondente ao melhor valor da função objectivo.

Assim, na resolução do problema 2, acima esquematizada, começámos por resolver a relaxação linear PL . Constatamos não ter obtido a solução óptima do problema de PLI e concluímos que 35 é um limite superior do valor óptimo da função objectivo.

Ramificando PL a partir da variável X_A, criámos então os subproblemas PL1 e PL2. Resolvemos PL1, constatando não se ter obtido a solução óptima do problema de PLI, uma vez que X_B* não toma um valor inteiro. Pode-se ainda manter 35 como limite superior do valor óptimo da função objectivo. De notar que, por coincidência, o valor óptimo da função objectivo nestes dois subproblemas é igual ... daí que prossigamos com a ramificação do primeiro desses problemas.

Ramificando PL1 a partir da variável X_B, criámos então os subproblemas PL11 e PL12. Resolvemos PL11, constatando que o mesmo é impossível. Resolvemos PL12, constatando não se ter ainda obtido a solução óptima do problema de PLI, uma vez que X_A* não toma um valor inteiro. De notar que qualquer ramificação de PL12 conduziria a soluções correspondentes a valores da função objectivo não superiores a 33.

Como podemos ramificar o subproblema PL2 a que corresponde um *melhor* limite superior da função objectivo (35), deixaremos, por agora, o subproblema PL12 .

Ramificando PL2 a partir da variável X_B, criámos então os subproblemas PL21 e PL22. Resolvendo o subproblema PL21 obtemos, pela primeira vez, uma solução inteira: **(X_A* = 2 ; X_B* = 4)** a que corresponde **F* = 34**. *Poderemos* estar perante a solução óptima do problema de PLI ! Diremos então que esta é a **solução incumbente**.

De notar que, neste momento, podemos concluir ser desnecessário prosseguir a ramificação do subproblema PL12. Com efeito, já havíamos concluído que essa ramificação conduziria a soluções óptimas correspondentes a valores da função objectivo não superiores a 33. Ora a solução incumbente, neste momento, corresponde a F* = 34, pelo que, não se justifica ramificar subproblemas correspondentes a valores de F inferiores a 34.

E porque não concluir, de imediato, que a solução ($X_A^* = 2$; $X_B^* = 4$) é a solução óptima do problema de PLI ? ... É que o subproblema PL2 correspondia a F* = 35, pelo que a ramificação que originou PL22 deverá ser explorada, já que pode corresponder a uma solução óptima correspondente a F não inferior a 34 ...

Resolvendo PL22 obtém-se uma solução inteira correspondente a F* = 33, pelo que termina a resolução do nosso problema ! A solução, até aí, incumbente passa a poder ser considerada a **solução óptima do problema de PLI: ($X_A^* = 2$; $X_B^* = 4$)** a que corresponde **F* = 34**.

[De notar que, como já se referiu, para a resolução do problema de PLI não fazia sentido prosseguir a ramificação de PL12 ... No entanto, se pretender verificar o que se referiu, poderá ramificar PL12 a partir da variável X_A ($X_A \geq 5$; $X_A \leq 4$) , obtendo PL121 e PL122 , a que correspondem, respectivamente, ($X_A^* = 5$; $X_B^* = 1$) ; F* = 31 e ($X_A^* = 4$; $X_B^* = 4$) ; F* = 32 - por acaso, duas soluções inteiras, mas obviamente piores do que a 'solução incumbente / óptima' ...] .

Para apresentarmos a resolução do **problema 2**, interrompemos a apresentação do **Algoritmo 'Branch and Bound'**. Sintetizemos agora o funcionamento deste Algoritmo.

Considere-se o problema de Programação Linear Inteira, que se designará por PLI, de <u>maximização</u>, cuja Relaxação Linear se designará por PL .

Para resolver o problema PLI recorrendo ao Algoritmo 'Branch and Bound', recorre-se à Relaxação Linear, PL , e

I - EM CADA ITERAÇÃO devem ser seguidos os três passos seguintes:

1 - Ramificação

De entre os subproblemas ainda não pesquisados, seleccionar o que foi criado mais recentemente. Em caso de empate, seleccionar o correspondente ao maior valor da função objectivo.

De entre as variáveis ineiras que apresentem um valor não inteiro, seleccionar a primeira de acordo com a ordem atribuída originalmente. Essa será a 'variável de ramificação'. Assuma- - se, sem perda de generalidade, que X_k é essa variável. Constitua-se as duas restrições seguintes:

$$X_k \geq \lceil X_k^* \rceil + 1 \quad \text{e}$$

$$X_k \leq \lceil X_k^* \rceil ,$$

onde $\lceil X_k^* \rceil$ designa o maior valor inteiro que não excede X_k^*.

Ramifique-se o nó correspondente ao subproblema em análise, em dois novos subproblemas, cada um deles obtidos a partir do subproblema em análise por adição de cada uma das restrições anteriormente definidas.

2 - Limitação

Para cada novo subproblema PL_k, determinar o correspondente valor óptimo da função objectivo, $F^*_{PL_k}$. Para tal recorrer ao Algoritmo Simplex Primal, ou ao Algoritmo Simplex Dual, se estiver a reoptimizar.

Actualizar o **limite superior para o valor óptimo da função objectivo** do problema PLI.

Se a solução óptima verificar as condições de integralidade das variáveis, actualizar a **solução incumbente**, bem como o valor da função objectivo a ela associado.

De notar que se $F^*_{PL_k}$ representar o valor óptimo da função objectivo correspondente ao subproblema PL_k, então qualquer subproblema criado a partir desse, por ramificação, terá $F^*_{PL_k}$ como limite superior da função objectivo. Se os coeficientes das variáveis na função objectivo forem inteiros então esse limite superior é igual a $\lceil F^*_{PL_k} \rceil$ (o maior valor inteiro que não excede $F^*_{PL_k}$).

3 - Eliminação

A cada novo subproblema deverão ser aplicados os seguintes quatro 'Testes de Eliminação'. Terminar-se-á a pesquisa a partir dos subproblemas que verifiquem, pelo menos, um dos testes.

Teste 1 : O valor óptimo da função objectivo correspondente é menor (ou igual)ao valor óptimo da função objectivo correspondente à solução incumbente.

Teste 2 : A solução óptima é inteira e o correspondente valor da função objectivo é igual ao limite superior do valor óptimo para a função objectivo do problema PLI.

➔**Foi encontrada a solução óptima do problema PLI !**

Teste 3 : O problema é impossível / não tem soluções admissíveis.

Teste 4 : A solução óptima verifica as condições de integralidade das variáveis.

➔ **Actualizar a 'solução incumbente' !**

II - CRITÉRIO DE OPTIMALIDADE :

Parar quando não houver subproblemas por pesquisar, ou quando for verificado o 'Teste de Eliminação nº 2'. A 'solução incumbente' é a solução óptima do problema PLI .

Se não existir qualquer 'solução incumbente', tal indicará que o problema PLI original não tem soluções admissíveis.

Antes de prosseguirmos gostaríamos de deixar duas notas:

1 - Na exposição apresentada considerou-se, para simplificar, que se estava a resolver um problema de PLI, de maximização. O Algoritmo 'Branch and Bound' pode ser utilizado directamente para a resolução de problemas de minimização. Nessas circunstâncias dever-se-á fazer as necessárias adaptações, nomeadamente no que diz respeito à 'Limitação' - o limite do valor óptimo da função objectivo do problema de PLI passa, agora, a ser um limite inferior...

2 - O Algoritmo 'Branch and Bound' pode ser aplicado a problemas de Programação Linear Mista (PLM). Neste caso, a ramificação só é aplicada à(s) variável(eis) inteira(s). Existe ainda uma variante deste Algoritmo para problemas de Programação Linear Binária, normalmente referido como 'Enumeração Implícita'.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- 1 -

MAX F = 3 . X + 2 . Y + 1 . Z

sujeito a:

$$1 . X + 1 . Y + 3 . Z \leq 150$$
$$1 . X + 1 . Y - 1 . Z \leq 100$$
$$3 . X - 1 . Y + 1 . Z \leq 100$$

X , Y , Z ≥ 0 e inteiros.

À Relaxação Linear deste problema corresponde o seguinte Quadro óptimo do Simplex:

	X	Y	Z	F1	F2	F3	
X	1	0	0	0	1/4	1/4	50
Y	0	1	0	1/4	2/4	-2/4	62,5
Z	0	0	1	2/4	-2/4	0	12,5
F	0	0	0	3/4	6/4	1/4	287,5

- 2 -

MAX F = 5 . X + 6 . Y

sujeito a:

$$2 . X + 3 . Y \leq 16$$
$$3 . X + 2 . Y \leq 17$$

X , Y ≥ 0

a) **e X inteiro.**
b) **e Y inteiro.**